Noções de Sistemas Dinâmicos de Funções Iteradas

Kelvyn Welsch

Conteúdo

1 Introdução

O objetivo deste texto é fornecer uma introdução ao estudo dos sistemas dinâmicos, principalmente os de tempo discreto e gerados por iterações de funções. Procura-se apresentar os principais resultados de [2] e, com isso, fornecer uma boa bagagem para ler artigos como [1]. Os temas centrais do texto são: i) relação entre atratores e conjuntos recorrentes por cadeias e ii) existência de funções de Lyapunov em espaços métricos compactos. Enfatiza-se que grande parte dos resultados daqui são creditados a [4], muitas das vezes formulados em contextos mais gerais. Os requisitos mínimos para um bom aproveitamento do texto é uma boa base de análise na reta e noções de espaços métricos.

Apresentados o objetivo e razão do texto, começaremos aqui falando sobre a motivação para o estudo dos sistemas dinâmicos. De maneira bem corriqueira e imprecisa, o estudo dos sistemas dinâmicas se resume em estudar o comportamento (principalmente a longo prazo) de sistemas onde é dada uma regra de como o seu estado evolui no decorrer do tempo. Uma maneira bastante comum de expressar tal regra, em especial na física, é através do uso de equações diferenciais ordinárias. Como exemplos práticos de sistemas dinâmicos temos a evolução da população de uma certa espécie em certa região; a concentração de determinado elemento ou isótopo radioativo; o movimento dos planetas no sistema solar; a evolução da condição climática, entre outros, sendo os dois últimos de especial relevância histórica no desenvolvimento do assunto.

Com efeito, podemos considerar a física, e principalmente a mecânica clássica, como berço do estudo dos sistemas dinâmicos. A questão sobre a estabilidade do sistema solar desempenhou um enorme incentivo para tal, afinal de contas, nada melhor do que a reconfortante (ou desesperadora) certeza de que pequenos desvios nas órbitas dos planetas não trariam (ou trariam) grandes alterações na configuração do sistemas solar. Uma figura digna de ser mencionada neste processo histórico é o físico e matemático francês Henri Poincaré (1854-1912).

Tornando um pouco mais preciso o conceito de sistema dinâmico: um sistema dinâmico pode ser pensado como um espaço (chamado de espaço de fase, sendo geralmente uma variedade) munido com uma família de funções (chamadas *funções de evolução*) indexada pelo tempo (ou melhor, por um conjunto que representa o tempo) e que manda pontos do espaço nele mesmo. Esta família de funções costuma estar indexada nos naturais ou nos reais. No primeiro caso, diz-se que o sistema é de tempo discreto; no segundo, contínuo. Na física, o espaço de fase é responsável por encapsular informações sobre a posição e velocidade das partículas em questão.

Neste texto, concentraremos nossa atenção principalmente em sistemas de tempo discreto. Consideraremos como nosso espaço de fase um espaço métrico e a evolução temporal a cada passo de tempo será dada por uma função contínua do espaço nele mesmo. Mais precisamente, consideraremos principalmente sistemas dinâmicos formados por iterações de funções. Para os principais resultados, faremos também a hipótese da função ser um homeomorfismo e do espaço métrico ser compacto.

Sem enrolar muito, passemos a um conceito que será fundamental neste texto: funções de Lyapunov. Um dos principais resultados de [1] consiste em determinar a existência de uma função de Lyapunov, com menos hipóteses do que antes era conhecido que fosse necessário. Mas qual seria a utilidade? Funções de Lyapunov estão estritamente relacionados com a estabilidade de sistemas dinâmicos, sendo usadas para prová-la. Em alguns casos, por exemplo, a existência de uma função de Lyapunov é uma condição necessária e suficiente para a estabilidade. Algo interessante de se notar é que não há uma técnica geral para a construção de uma função de Lyapunov. Mas leis de conservação, como as que existem na física, frequentemente ajudam.

2 Conceitos Básicos

Nesta seção começaremos apresentando os mais básicos conceitos que serão usados no texto, por conseguinte, o número de definições será considerável e o de proposições, diminuto.

2.1 Periodicidade

Definição 2.1. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Um ponto $a \in M$ é dito *ponto periódico de período n* se $f^n(a) = a$ e se n for o menor natural que isso acontece. Um ponto periódico de período 1 é chamado de *ponto fixo*. Se p é tal que o ponto $q = f^m(p)$ é periódico, para algum m natural, então p é dito eventualmente periódico. Podem ser usadas as seguintes notações: $\mathrm{Per}(n, f) := \{x; f^n(x) = x\}$, $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}(1, f)$ e também $\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Per}(n, f)$. ♣

Perceba que um ponto eventualmente periódico é um ponto que não necessariamente é periódico, mas que futuramente (lembre-se de que iterar a função significar avançar no tempo) se tornará. Ou seja, eventualmente ele se tornará um ponto periódico. Note que $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f)$.

2.2 Órbita

Definição 2.2. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. A *órbita futura (ou positiva) do ponto a* é o conjunto $\mathcal{O}^+(a) := \{f^n(a); n \geq 0\}$. Caso a função for invertível, definimos como a *órbita passada (ou negativa) do ponto a* como o conjunto $\mathcal{O}^-(a) := \{f^n(a); n \leq 0\}$. Também para uma função invertível definimos como a *órbita do ponto a* o conjunto $\mathcal{O}(a) := \{f^n(a); n \in \mathbb{Z}\}$. ♣

A órbita de um ponto é o conjunto de lugares por onde, em algum momento, o ponto vai passar/passou. No caso de uma função não ser invertível, a órbita passada de um ponto (ou a órbita total) pode ser definida escolhendo um ponto para cada vez que tomamos a imagem inversa do ponto. Naturalmente, a órbita passada não será univocamente determinada neste caso. Observe que se um ponto é periódico (ou eventualmente periódico), então sua órbita futura será um conjunto finito e é chamada de *órbita periódica*. Dependendo da conveniência, podemos tratar as órbitas como sequências em vez de conjuntos. Daí uma órbita periódica seria uma sequência (infinita) mas com imagem finita.

Neste momento abrimos um pequeno parênteses. O nome "órbita"não é uma mera coincidência com o conceito homônimo de teoria de grupos. De fato, podemos pensar na iteração da função como uma ação do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ sobre M da seguinte forma: $\alpha : \mathbb{Z} \times M \to M$, $\alpha(k, x) := f^k(x)$. Daí, a órbita desta ação empata com o conceito de órbita que definimos. Esta correspondência pode ser estendida, inclusive para outros tipos de sistemas dinâmicos. Não faremos isto por enquanto.

2.3 Estabilidade Lyapunov

Definição 2.3. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Um ponto $p \in M$ converge no futuro para q (ou simplesmente converge) se $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(f^n(p), f^n(q)) = 0$. Um ponto $p \in M$ converge no passado para q se $\lim_{n\to-\infty} \mathrm{d}(f^n(p), f^n(q)) = 0$. O *conjunto estável de* p é o conjunto de pontos que convergem no futuro para p, e é denotado por $W^s(p)$. O *conjunto instável de* p é similar, porém a convergência é no passado, e é denotado por $W^u(p)$. Às vezes esses conjuntos são chamados de variedade estável e instável, respectivamente. ♣

Definição 2.4. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Um ponto $p \in M$ é dito *Lyapunov estável* ou *L-estável* se, para todo $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que $d(x, p) < \delta \implies d(f^n(x), f^n(p)) < \epsilon$, $\forall n \geq 0$. Um ponto $p \in M$ é dito *assintoticamente estável* se ele for Lyapunov estável e ainda existir uma vizinhança de p que está contida em $W^s(p)$. Se p é assintoticamente estável e um ponto periódico, então é dito *ponto periódico atrator* ou *sorvedouro periódico*. Se p for um ponto periódico tal que $W^u(p)$ é vizinhança de p, então p é um *ponto periódico repulsor* ou uma *fonte periódica*. ♣

Ser Lyapunov estável significa que um ponto estar próximo a outro implica que a órbita de um está próxima à do outro. Ser Lyapunov estável e ser assintoticamente estável podem parecer redundantes, mas não são. Tentarei explicar a diferença com palavras. Como eu disse, ser Lyapunov estável significa que pontos próximos geram órbitas *sempre* próximas. Isto não significa, entretanto, que as órbitas irão convergir. É bem verdade que podemos tomar um ϵ tão pequeno quanto queiramos, então as órbitas podem ficar tão próximas quanto queiramos. Mas, em geral, quanto mais próximo queremos que as órbitas fiquem, menor vai ser a região de pontos (a bola do δ) onde isso vai acontecer. O δ depende violentamente do ϵ. Já no caso de existir uma vizinha que converge para o ponto, a região é fixa! O que vai depender do ϵ não será o tamanho da região, mas o momento em que as órbitas vão ficar próximas. Neste caso, as órbitas não necessariamente ficam *sempre* próximas mas, a partir de um momento no futuro (não importa o quanto demore), as órbitas não somente vão ficar próximas quanto irão convergir. Em suma: num dos caso a proximidade ocorre sempre, mas a convergência não é garantida; no outro caso, a convergência é garantida, mas as órbitas podem se distanciar inicialmente. Além disso, num caso é a região que depende do ϵ; no outro é o tempo.

Há alguns critérios que decidem se um ponto fixo é atrator ou repulsor baseando-se na derivada (para funções de variável real). Não entraremos em tantos detalhes aqui sobre este assunto. Outro tópico correlato e muitíssimo relevante mas que não trataremos (pelo menos por enquanto) é a questão de estabilidade estrutural.

3 Invariância

Definição 3.1. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um subconjunto $S \subset M$ é dito *positivamente invariante* se $f(S) \subset S$. Um subconjunto $S \subset M$ é dito *negativamente invariante* se $f^{-1}(S) \subset S$. Um subconjunto $S \subset M$ é dito *invariante* se $f(S) = S$. Dado um subconjunto $V \subset M$, denotamos $\mathrm{Inv}(V, f) \coloneqq \{x \in V; \mathcal{O}(x) \subset V\}$. ♣

Apesar da definição acima parecer inofensiva, não se engane, conjuntos invariantes podem ser os mais complicados possíveis: conjuntos de Cantor, fractais, etc. Além disso, o estudo da existência e estrutura de conjuntos invariantes não somente é um tópico central em sistemas dinâmicos como é a primordial em teoria ergódica. Grande parte disto decorre das boas propriedades das quais conjuntos invariantes (ou positivamente, negativamente) gozam e parte das quais veremos nesta seção.

Apenas para exemplificar a importância deste conceito, comentamos que grande parte dos principais objetos da teoria são invariantes ou ao menos positivamente invariantes, sendo necessárias poucas condições adicionais para serem de fato invariantes. Entre eles estão os conjuntos limites e os atratores, temas dos próximos capítulos.

Chamamos atenção para o fato de que, se f for um homeomorfismo, então S ser invariante implica que S é negativamente invariante e que uma órbita periódica é sempre um conjunto invariante.

Por falar em atratores, o próximo teorema a respeito de conjuntos invariantes será o principal fato que usaremos ao tratar sobre eles.

Lema 3.1. *Sejam $f : M \to M$ uma bijeção e $U \subset M$ um conjunto. Se U é positivamente invariante, então a família de conjuntos $(f^n(U))_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e a família $(f^{-n}(U))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.* □

Demonstração. Será por indução. Para $n = 0$, temos que $f(U) \subset U$ por hipótese. Suponha agora que $f^n(U) \subset f^{n-1}(U)$ para algum $n \geq 1$. Então $f^{n+1}(U) = f(f^n(U)) \subset f(f^{n-1}(U)) = f^n(U)$, pela hipótese indutiva, donde $f^{n+1}(U) \subset f^n(U)$

De semelhante modo, para $n = 0$ temos $f(U) \subset U \implies f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(U)$. Mas, como f é uma bijeção, vale que $U = f^{-1}(f(U))$, donde $U \subset f^{-1}(U)$. Suponha agora que $f^{-k}(U) \subset f^{-(k+1)}(U)$ para algum k. Daí

$f^{-1}(f^{-k}(U)) \subset f^{-1}(f^{-(k+1)}(U)) \implies f^{-(k+1)}(U) \subset f^{-(k+2)}(U)$, o que completa a demonstração. ■

Corolário 3.1.1. *Se $f(\overline{U}) \subset U$, então a família $(f^n(\overline{U}))_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e a família $(f^{-n}(\overline{U}))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente.* □

Demonstração. Basta notar que $f(\overline{U}) \subset U \subset \overline{U}$ e usar o lema. ■

O que o corolário está dizendo, e que será extensivamente usado, é que, satisfeitas as hipóteses sobre U, então: $...f^n(\overline{U}) \subset ... \subset f^2(\overline{U}) \subset f(\overline{U}) \subset \overline{U} \subset f^{-1}(\overline{U}) \subset f^{-2}(\overline{U}) \subset ... \subset f^{-n}(\overline{U})....$ (E o mesmo, mas trocando $\overline{U}$ por U). Vale também ressaltar que as hipóteses para que todos os conjuntos colapsem são bem fracas. É fácil de ver que se $f^{-1}(U) \subset U$ ou se $U \subset f(U)$ [1], por exemplo, então $\overline{U} = U$ e $f^k(U) = U$, para todo k inteiro. Ao lidarmos com atratores, este caso em que todos os conjuntos empatam será considerado patológico.

4 Conjuntos limite

Definição 4.1. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um ponto y é dito um *ponto $\omega-$limite de x por f* se existe uma subsequência de $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para y. O conjunto de todos os pontos $\omega-$limite de x por f é chamado de *conjunto $\omega-$limite de x* e denotado por $\omega(x, f)$ ou $\omega(x)$. Se f é invertível, então y é *ponto $\alpha-$limite de x por f* se existir uma subsequência de $(f^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para y. Analogamente definimos o conjunto $\alpha-$limite. ♣

Note que se um ponto x é periódico de período n, então os conjuntos empatam: $\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x) = \{x, ..., f^{n-1}(x)\}$. Neste caso, o conjunto é finito e não-conexo, desde que $n > 1$. Além disso, vale a seguinte:

Proposição 4.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Se x e y convergem no futuro, então vale que $\omega(x) = \omega(y)$.* □

Demonstração. Seja $p \in \omega(x)$. Para provarmos que $p \in \omega(y)$, basta provarmos que, para todo $\epsilon > 0$ e para todo n_0 natural, existe um $m_0 > n_0$ natural tal que $d(f^{m_0}(y), p) < \epsilon$. Ora, dado este ϵ, vai existir um n_1 tal que $d(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon/2$, $\forall m > n_1$. Tome $n = \min\{n_0, n_1\}$. Como $p \in \omega(x)$, existe $m_0 > n$ tal que $d(f^{m_0}(x), p) < \epsilon/2$. Daí, $d(f^{m_0}(y), p) \leq d(f^{m_0}(y), f^{m_0}(x)) + d(f^{m_0}(x), p) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, por construção de m_0. Isso mostra que $\omega(x) \subset \omega(y)$. Trocando os papéis de x e y obtemos a outra inclusão e a demonstração fica encerrada. ■

A recíproca não vale. Tome por exemplo pontos periódicos cuja órbita sejam iguais mas que tenha alguma defasagem. O conjunto $\omega-$limite será o mesmo mas eles nunca se aproximarão um do outro.

O próximo teorema encerra as mais básicas propriedades dos conjuntos limites.

[1] Isto é, se U é invariante.

Teorema 4.2. *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma função contínua. Então vale que:*

1. $\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x); k \geq n\}}$. *Se f é invertível, então*
   $\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x); k \leq -n\}}$
2. *Se $f^n(x) = y$ para algum n natural, então $\omega(x) = \omega(y)$. Se f é invertível, então $\alpha(x) = \alpha(y)$.*
3. *$\omega(x)$ é fechado e positivamente invariante. Se $\mathcal{O}^+(x)$ está contida em algum subconjunto compacto de M ou se f é injetiva, então $\omega(x)$ é invariante. Se f é invertível, então, $\alpha(x)$ é fechado e invariante.*
4. *Se $\mathcal{O}^+(x)$ está contido em algum subconjunto compacto de M, então $\omega(x)$ é não-vazia, compacta e o limite de $d(f^n(x), \omega(x))$ é zero quando n tende a infinito. Similarmente, se $\mathcal{O}^-(x)$ está contido em algum subconjunto compacto de M, então $\alpha(x)$ é não-vazia, compacta o limite de $d(f^n(x), \alpha(x))$ é zero quando n tende a menos infinito*
5. *Se $D \subset M$ é fechado e positivamente invariante, e $x \in D$, então $\omega(x) \subset D$. Similarmente, se f é invertível e D é fechado, negativamente invariante e $x \in D$, então $\alpha(x) \subset D$.*
6. *se $y \in \omega(x)$, então $\omega(y) \subset \omega(x)$ e (se f é invertível, então $\alpha(y) \subset \omega(x)$. Similarmente, se f é invertível e $y \in \alpha(x)$, então, $\alpha(y), \omega(y) \subset \alpha(x)$.*

□

Demonstração. Faremos apenas as demonstrações para os conjuntos $\omega-$limites. Para os conjuntos $\alpha-$limite o processo é análogo.

1. Seja $y \in \omega(x)$. Por definição, existe uma (sub)sequência de elementos da órbita de x que tendem para y. Dado N natural, podemos tomar os elementos da sequência referida que estejam contidos no subconjunto $\{f^n(x); n > N\}$. Evidentemente, esta sequência ainda tenderá para y, pois no máximo foi retirado dela um número finito de elementos. Uma vez que há uma sequência de elementos de $\{f^n(x); n > N\}$ que tendem para y, então $y \in \overline{\{f^n(x); n > N\}}$, por definição de fecho. Como N foi tomado arbitrariamente, é bem verdade que y pertence a conjuntos formados assim para todo N, donde y pertence à intersecção, concluindo a prova de uma das inclusões. Reciprocamente, supondo que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x); k \geq n\}}$, queremos encontrar uma subsequência da órbita de x que convirja para y. Então, basta mostrar que, para todo $\epsilon > 0$ e, para todo $n > 0$, existe $m > n$ tal que $f^m(x) \in B_\epsilon(y)$. Dado n natural, como y pertence à intersecção, em particular temos $y \in \overline{\{f^k; k > n\}}$. Por definição de fecho, dado ϵ arbitrariamente devemos ter $B_\epsilon(y) \cap \{f^k; k > n\} \neq \emptyset$, donde existe $m < n$ com $f^m(x) \in B_\epsilon(y)$, como gostaríamos de mostrar.

2. Dá para tirar esse resultado usando um resultado bem conhecido de teoria de grupos e lembrando do paralelo entre as definições de órbita nos dois contextos.

3. Para ver que é fechado, basta notar, por 1, que se trata de uma intersecção de conjuntos fechados, pois o fecho de um conjunto é sempre fechado. Para a próxima parte, note que se $y \in \omega(x)$, então existe uma sequência $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y$. Dado $j \in \mathbb{N}$, f^j é contínua. Portanto, teremos: $\lim_{k\to\infty} f^j(f^{n_k}(x)) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k+j}(x) = f^j(y)$, donde existe uma subsequência de $\mathcal{O}^+(x)$ que converge para $f^j(y)$, e concluímos que $f^j(y) \in \omega(x)$, para j natural. Isto prova que $\omega(x)$ é positivamente invariante. Se f é injetiva, ser positivamente invariante implica em ser invariante. Suponha, por outro lado que $\mathcal{O}^+(x)$ está contida nalgum subconjunto compacto de M. Para provar que $\omega(x) \subset f(\omega(x))$ basta mostrar que, dado $y \in \omega(x)$, existe $z \in \omega(x)$ tal que $f(z) = y$. Tomando um tal y, como ele está contido em $\omega(x)$, existe uma sequência $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para y. A partir desta sequência, tome uma nova sequência, dada por $(f^{n_k-1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$. Como os elementos desta sequência estão num conjunto compacto, há, no mínimo, uma subsequência de $(f^{n_k-1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto z. Como existe uma subsequência da órbita de x de converge para z, devemos ter $z \in \omega(x)$. Ora, pela continuidade de f, $f(z) = \lim f(f^{n_k-1}(x)) = \lim f^{n_k}(x) = y$, donde $f(z) = y$, como queríamos demonstrar.

4. Basta ver que a sequência $\mathcal{O}^+(x)$ irá possuir uma subsequência convergente, por estar num compacto. Além do mais, lembre-se de que subconjuntos fechados de conjuntos compactos são compactos. Assim, o conjunto $\overline{\{f^k(x); k > N\}}$, por ser fechado e contido no compacto que contém a órbita futura de x, é compacto, para todo N. Como a intersecção de compactos é compacto, concluímos que $\omega(x)$ é compacto, usando a equivalência fornecida por 1. Para provar que $d(f^n(x), \omega(x))$ vai a zero, suponhamos por absurdo que não vá. Então existe um $\epsilon > 0$ e uma subsequência tal que $d(f^{n_k}(x), \omega(x)) > \epsilon$. Como esta subsequência está num compacto, possui, ainda, um valor de aderência que não está em $\omega(x)$, contradizendo a definição de $\omega(x)$.

5. Como D é positivamente invariante, $f^n(x) \in D$, para todo n. Isto é, $\mathcal{O}^+(x) \subset D$. Como D é fechado, todos os valores de aderência de $\mathcal{O}^+(x)$ devem estar em D, donde $\omega(x) \subset D$.

6. Por 3, $\omega(x)$ é fechado e positivamente invariante. Por 5, $y \in \omega(x) \implies \omega(y) \subset \omega(x)$, substituindo D por $\omega(x)$.

■

O primeiro item do teorema diz que $\omega(x)$ está relacionado com os pontos de aderência da órbita de x. Porém, simplesmente tomar os pontos de aderência da órbita não funciona, pois todo ponto da órbita é de aderência a ela, mas nem todo ponto é $\omega-$limite. Para contornar isso, devemos considerar os pontos de aderência da órbita que continuam o sendo mesmo que excluindo uma quantidade finita de pontos da órbita. De fato, um conjunto finito de pontos não influencia no conjunto $\omega-$limite de um ponto. Em resumo, o conjunto $\omega-$limite de um ponto empata com o conjunto dos pontos que são de aderência à órbita, não importa qual número finito de pontos se retire dela. Este caráter, que torna irrelevante um conjunto finito de pontos acrescentado ou retirado da órbita para caracterização dos conjuntos limites também é a essência do item 2.

Os itens 3 e 5, em conjunto, dizem que $\omega(x)$ é o menor fechado positivamente invariante que contem x. Perceba que o fato de $\omega(x)$ ser positivamente invariante depende violentamente de f ser contínua. De fato, funções contínuas mandam pontos próximos em pontos próximos. Sendo assim, se um ponto é $\omega-$limite, há uma infinidade de pontos da imagem próximos a ele. Aplicar f fará com que aquela infinidade de pontos próximos continuem próximos, pela continuidade de f.

Definição 4.2. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um subconjunto $S \subset M$ é dito ser um *conjunto minimal* se S é não-vazio, fechado, invariante e se $B \subset S$ ser fechado, não-vazio e invariante implicar que $B = S$. ♣

Ou seja, um conjunto é minimal se é fechado, invariante e se não houver nenhuma parte dele que também é fechada e invariante (excluindo, claro, o conjunto vazio, que é patológico). Veremos agora um resultado que mostra a relação entre conjuntos minimais e conjuntos $\omega-$limites.

Proposição 4.3. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ uma função contínua e $S \subset M$ um subconjunto compacto e não-vazio. Então S é um conjunto minimal se, e somente se $\omega(x) = S$, $\forall x \in S$.* □

Demonstração. Suponha que S é minimal. Tomando $x \in S$, pelo item 5 do teorema anterior, como S é compacto (e portanto fechado) e invariante (e portanto positivamente invariante), vale que $\omega(x) \subset S$. Por S ser invariante, também vale que $\mathcal{O}^+(x) \subset S$. Pelos itens 3 e 4 do teorema anterior, $\omega(x)$ é não-vazio, invariante e compacto. Da hipótese que S é minimal vem que $\omega(x) = S$, $\forall x \in S$.

Suponha agora que $\omega(x) = S$, $\forall x \in S$. Tome $\emptyset \neq B \subset S$, com B fechado e invariante. Pelos mesmos argumentos feitos anteriormente, dado $x \in B$, temos $\omega(x) \subset B$. Mas $\omega(x) = S$, donde $S \subset B$ e portanto $B = S$, donde S é minimal. ■

5 Recorrência

Nesta seção adentraremos de fato num dos tópicos centrais do texto: recorrência por cadeias. Antes, daremos também a definição de outros tipos de recorrência. Quero frisar que, informalmente, um ponto recorrente é um ponto que se aproxima bastante de ser periódico.

Definição 5.1. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um ponto $x \in M$ é dito $\omega-$recurrente se $x \in \omega(x)$. Analogamente se define um ponto $\alpha-$recorrente. ♣

Definição 5.2. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um ponto p é dito não-errante se, para toda vizinhança U de p existe um natural n tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, ou seja, existe $q \in U$ tal que $f^n(q) \in U$. O conjunto dos pontos não-errantes é chamado de conjunto não-errante e denotado por $\Omega(f)$. ♣

5.1 Recorrência por cadeias

O objetivo desta subseção é introduzir o conceito de recorrência por cadeias. Começaremos definindo o conceito de cadeia, de $\epsilon-$cadeia e por fim a recorrência propriamente dita. Depois disto, estudaremos algumas das propriedades do conjunto recorrente por cadeias.

Definição 5.3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Uma (n+1)-upla ordenada de pontos de M $(x_0, ..., x_n)$ é dita ser uma *cadeia* em M, onde n é seu comprimento. Uma $\epsilon-$*cadeia* é uma cadeia tal que $d(f(x_j), x_{j+1}) < \epsilon$, $\forall j$ com $0 \leq j \leq n - 1$. ♣

Uma ϵ-cadeia pode ser vista como uma sequência (finita) de pontos que podem ser obtidos com a iteração do seguinte processo: espera o tempo passar e dá um pulinho menor que ϵ, ou seja, uma trajetória com saltos. Alguns autores até chamam isto de *pseudo-órbita*, justamente por ser uma órbita com alguns erros. Imagino que a motivação para esta definição venha da capacidade limitada que temos de calcular trajetórias computacionalmente. Naturalmente, não é possível representar sem erros um número irracional computacionalmente, por exemplo. A computação se faz muito presente na área aplicada de sistemas dinâmicos.

Chamo a atenção para o fato evidente de que, se houver uma $\epsilon-$cadeia de x para y e uma de y para z, então haverá uma de x para y, bastando concatenar as duas.

Definição 5.4. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um ponto $x \in M$ é dito ser *recorrente por cadeias* se, para todo $\epsilon > 0$ existir uma $\epsilon-$cadeia de x para x. O conjunto dos pontos recorrentes por cadeias é chamado de conjunto recorrente por cadeias e é denotado por $\mathcal{R}(f)$. ♣

Teorema 5.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Então o conjunto $\mathcal{R}(f)$ é compacto e positivamente invariante.* □

Demonstração. Como estamos num espaço métrico compacto, mostrar que o conjunto $\mathcal{R}(f) \subset M$ é compacto se reduz a mostrar que este mesmo subconjunto é fechado. Por sua vez, basta mostrar que $\overline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$. Tome então

$x \in \overline{\mathcal{R}}$. Dado $\epsilon > 0$, seja δ_1 tal que $d(x,y) < \delta_1 \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$, que existe pela continuidade de f. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \epsilon/2\}$. Pelo fato de x pertencer ao fecho de $\mathcal{R}$, deve existir $y \in \mathcal{R}$ tal que $d(x,y) < \delta$. Como $y \in \mathcal{R}$, há de haver uma $(\epsilon/2)-$cadeia de y para y. Denotemos esta cadeia por $(y = y_0, y_1, ..., y_n = y)$. Construiremos agora uma $\epsilon-$cadeia que vai de x para x e automaticamente virá que $x \in \mathcal{R}$, o que concluirá nossa demonstração pela arbitrariedade de ϵ. Tome a cadeia onde $x = x_0 = x_n$ e $x_i = y_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. Verifiquemos que de fato se trata de uma $\epsilon-$cadeia. Já sabemos que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon/2 < \epsilon$ para $1 \leq i \leq n-2$, bastando verificar que $d(f(x_0), x_1) = d(f(x), x_1) < \epsilon$ e $d(f(x_{n-1}), x_n) = d(f(x_{n-1}), x) < \epsilon$. Ora, $d(f(x), x_1) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), x_1) = d(f(x), f(y)) + d(f(y), y_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Por fim, $d(f(x_{n-1}), x) \leq d(f(x_{n-1}), y) + d(y, x) = d(f(y_{n-1}), y_n) + d(x, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Mostremos agora que $f(\mathcal{R}(f)) \subset \mathcal{R}(f)$. Tomemos $x \in \mathcal{R}(f)$. Queremos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma $\epsilon-$cadeia de $y := f(x)$ para y. Ora, dado $\epsilon > 0$, tomemos δ_1 tal que $d(y,z) < \delta_1 \implies d(f(y), f(z)) < \epsilon/2$. Tal $delta_1$ existe pela continuidade de f. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \epsilon/2\}$. Como $x \in \mathcal{R}(f)$, tomemos uma $\delta-$cadeia de x para x. Seja agora uma cadeia de y para y formada da seguinte forma: $y_0 = y$, $y_i = x_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $y_n =$. Resta mostrar que esta é uma $\epsilon-$cadeia. Por construção, temos que $d(f(y_i), y_{i+1}) = d(f(x_{i+1}), x_{i+2}) < \delta\epsilon/2 < \epsilon$, para $1 \leq i \leq n-2$. Falta provar que $d(f(y), y_1) < \epsilon$ e $d(f(y_{n-1}), y_n)$. Para o último temos $d(f(y_{n-1}), y_n) = d(f(x_n), y) = d(f(x), y) = d(y, y) = 0 < \epsilon$. Finalmente, $d(f(y), y_1) \leq d(f(y), f(x_1)) + d(f(x_1), y_1) = d(f(y), f(x_1)) + d(f(x_1), x_2)$. Note que $d(f(x_0), x_1) = d(y, x_1) < \delta < \delta_1$, donde $d(f(y), f(x_1)) < \epsilon/2$. Além disso, $d(f(x_1), x_2) < \delta < \epsilon/2$ por construção, e obtemos que $d(f(y), y_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

Proposição 5.2. *Sejam (M,d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Então o conjunto $\mathcal{R}(f)$ é invariante.*

5.2 O conjunto $\Omega_\epsilon^+(Y, f)$ e relacionados.

Definição 5.5. Sejam (M,d) um espaço métrico, $f : M \to M$ uma função contínua e $Y \subset X$ um subconjunto. Definimos $\Omega_\epsilon^+(Y,f) := \{x \in M; \exists y \in Y$ e uma $\epsilon-$corrente de y para $x\}$ e $\Omega_\epsilon^-(Y,f) := \{x \in M; \exists y \in Y$ e uma $\epsilon-$corrente de x para $y\}$. ♣

O objetivo desta seção é estudar sobre o objeto da definição acima. Em ordem, estudaremos suas propriedades básicas, relações com o conjunto recorrente por cadeias, relação com conjuntos $\omega-$limite, conjuntos similares a $\Omega_\epsilon^+(x,f)$ e as relações entre estes conjuntos.

Intuitivamente, o conjunto $\Omega_\epsilon^+(x,f)$ pode ser pensado como o conjunto de pontos que x pode alcançar, se for dada uma certa tolerância de ϵ para possíveis erros na trajetória. Naturalmente, quanto menor o ϵ, menor o conjunto, isto é: $\epsilon < \eta \implies \Omega_\epsilon^+(x,f) \subset \Omega_\eta^+(x,f)$.

Proposição 5.3. *Sejam (M,d) um espaço métrico, $f : M \to M$ uma função contínua e $Y \subset X$ um subconjunto. Então o conjunto $\Omega_\epsilon^+(Y,f)$ é aberto.* $\square$

Demonstração. Seja $x \in \Omega_\epsilon^+(Y,f)$. Então existe um $y \in Y$ e uma $\epsilon-$cadeia $(y = x_0, ..., x_n = x)$. Por definição, temos que $d(f(x_{n-1}), x) < \epsilon$, ou seja $x \in B(f(x_{n-1}), \epsilon)$. Esta bola é aberta, então existe $\eta > 0$ tal que $B(x,\eta) \subset B(f(x_{n-1}), \epsilon)$. Mas daí $B(x,\eta) \subset \Omega_\epsilon^+(Y,f)$ pois, para $z \in B(x,\eta)$ podemos tomar $(y = x_0, ..., x_{n-1}, z)$, que será evidentemente uma $\epsilon-$cadeia. Mostramos que, para todo $x \in \Omega_\epsilon^+(Y,f)$ existe uma bola aberta centrada em x e contida em $\Omega_\epsilon^+(Y,f)$, donde segue que este conjunto é aberto. $\blacksquare$

Proposição 5.4. *Se $y \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$, então $\Omega_\epsilon^+(y,f) \subset \Omega_\epsilon^+(x,f)$.* $\square$

Demonstração. Se $z \in \Omega_\epsilon^+(y,f)$, então existe uma $\epsilon-$cadeia de y para z. Porém, como $y \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$, existe uma de x para y. Concatenando as duas obtemos uma $\epsilon-$cadeia de x para z, donde $z \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$. $\blacksquare$

Note que x ser recorrente por cadeias é equivalente a $x \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$, para todo $\epsilon > 0$. O próximo resultado fornece outra relação.

Proposição 5.5. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Se $x \in \mathcal{R}(f)$, então $\Omega_\epsilon^+(x,f)$ é uma vizinhança aberta de x. Mais precisamente, teremos que $B(x,\epsilon/2) \subset \Omega_\epsilon^+(x,f)$.* $\square$

Demonstração. Que $\Omega_\epsilon^+(x,f)$ é aberto já sabemos da proposição 5.3. Basta provar que $B(x,\epsilon/2) \subset \Omega_\epsilon^+(x,f)$. Seja então $x' \in B(x,\epsilon/2)$. Por ser x recorrente por cadeias (por hipótese), vai existir uma $\epsilon/2-$cadeia $(x = x_0, ..., x_n = x)$. Temos então que $d(f(x_{n-1}), x') \leq d(f(x_{n-1}), x) + d(x, x') < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$, donde a cadeia $(x_0 = x, ..., x_{n-1}, x'$ é uma $\epsilon-$cadeia e portanto $x' \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$ $\blacksquare$

Recorde-se da definição de conjunto ômega-limite. Este é o conjunto de pontos que, apesar de não estarem na órbita de x, são os que mais se aproximam de estar. Nada mais justo do que esperar que $\omega(x) \subset \Omega_\epsilon^+(x,f)$, para qualquer ϵ. É isto que a próxima proposição formalizará.

Proposição 5.6. *Seja (M,d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Se $x \in M$, então $\omega(x) \subset \Omega_\epsilon^+(x,f)$, para todo $\epsilon > 0$.* $\square$

Demonstração. Seja $y \in \omega(x)$. Por definição, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x), y)$ $< \epsilon$. Tome a cadeia $(x_0 = x, f(x), ..., f^k(x), y)$. Teremos que $d(f(x_{i-1}), x_i) = 0$ para todo i entre 1 e $k-1$. Além disso, $d(f^k(x), y) < \epsilon$, o que demonstra que é uma $\epsilon-$cadeia, donde $y \in \Omega_\epsilon^+(x,f)$. $\blacksquare$

Corolário 5.6.1. *Se um ponto é $\omega-$recorrente, então também é recorrente por cadeias.* $\square$

O corolário nos diz que o conceito de recorrência por cadeias é mais fraco que o de $\omega-$recorrência.

Definição 5.6. Sejam (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ uma função contínua e $Y \subset M$ um subconjunto.

O *conjunto limite de $\epsilon-$cadeias de Y por f* é definido por $\Omega_\epsilon^+(Y, f)^* := \{x \in M; \forall n \geq 1, \exists y \in Y$ e uma $\epsilon-$corrente de y para x de comprimento maior de $n\}$. O *conjunto limite forward chain de Y* é o conjunto $\Omega^+(Y, f)^* := \bigcap_{\epsilon>0} \Omega_\epsilon^+(Y, f)^*$.

Similarmente, definimos o conjunto $\Omega_\epsilon^-(Y, f)^* := \{x \in M; \forall n \geq 1, \exists y \in Y$ e uma $\epsilon-$ corrente de x para y de comprimento maior de $n\}$ e o *conjunto limite bacward chain* $\Omega^-(Y, f)^* := \bigcap_{\epsilon>0} \Omega_\epsilon^-(Y, f)^*$. ♣

Note que, obviamente, teremos $\Omega_\epsilon^+(Y, f) \subset \Omega_\epsilon^+(Y, f)^*$. A diferença reside unicamente no fato do último conjunto garantir a existência de $\epsilon-$cadeias de tamanho arbitrariamente grande.

Mais detalhadamente, o conjunto limite de $\epsilon-$cadeias de Y é o conjunto dos pontos de X que podem ser atingidos por uma $\epsilon-$cadeia partindo de um ponto de Y e de comprimento arbitrariamente grande. O conjunto $\Omega_\epsilon^-(Y, f)^*$ é igual, com exceção de que as cadeias devem partir do ponto de X, ou seja, percorrer o sentido inverso. O conjunto $\Omega^+(Y, f)^*$ é análogo ao conjunto $\omega-$limite no seguinte sentido. O conjunto $\omega-$limite de x era o conjunto de pontos tais que, x ficava a uma distância menor de ϵ, depois e ter passado n ciclos de tempo, para todo n e ϵ. O conjunto $\Omega^+(Y, f)^*$ é o conjunto de pontos que podem ser atingidos por algum um $y \in Y$ após n ciclos de tempo, com a exceção de que pode ter havido pulinhos menores de ϵ durante o caminho, para todo n e ϵ. Podemos traçar um paralelo parecido entre os conjuntos $\Omega^-(Y, f)^*$ e $\alpha-$limite.

Com um pouco de esforço pode-se ver que $\mathcal{R}(f) = \{x; x \in \Omega^+(x, f)^*\} = \{x; x \in \Omega^-(x, f)^*\}$. Uma das inclusões é evidente (desde que você entendeu bem os conceitos). O trabalho está em contornar a suposição de n arbitrariamente grande (meu palpite é ficar dando várias voltas).

5.3 Transitividade por Cadeias

Primeiramente, apresentamos uma classe de equivalência no conjunto recorrente por cadeias e que será útil posteriormente.

Definição 5.7. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{R}(f)$ por $x \sim y$ se, $\forall \epsilon > 0$ existe uma $\epsilon-$cadeia de x para y e outra de y para x. Daí x e y são chamados de *equivalentes por cadeias*. As classes de equivalência são chamadas de *componentes de $\mathcal{R}(f)$*. ♣

A reflexividade vem de estarmos em $\mathcal{R}(f)$, para a simetria, basta invertermos os sentidos das cadeias e, para a transitividade, basta realizarmos uma concatenação de cadeias. De fato temos uma relação de equivalência então. Outra maneira de definir esta relação de equivalência é dizer que $x \sim y$ se $y \in \Omega^+(x, f)$ e $x \in \Omega^+(y, f)$. Ou ainda, $y \in \Omega^+(x, f)^*$ e $x \in \Omega^+(y, f)^*$.

Definição 5.8. Sejam (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Um subconjunto $X \subset M$ é dito *transitivo por cadeias* se $\forall x, y \in X$ e $\forall \epsilon > 0$ existe uma $\epsilon-$cadeia de x para y. ♣

É fácil ver que se X é um conjunto transitivo por cadeias, então $X \subset \mathcal{R}(f)$. A próxima proposição fornece a recíproca deste fato, sob certas condições. Note também que cada componente de $\mathcal{R}(f)$ é transitivo por cadeias.

Proposição 5.7. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $T \subset M$ um subconjunto fechado, conexo e invariante. Se $T \subset \mathcal{R}(f)$, então T é transitivo por cadeias.*

□

Demonstração. Dados $x \in T$ e $\epsilon > 0$, defina $S(x, \epsilon) = \Omega^+_\epsilon(x, f) \cap T$. $S(x, \epsilon)$ é sempre não-vazio pois T é recorrente por cadeias então vale sempre que $x \in S(x, \epsilon)$. Além disso, pela proposição 5.3, $A(x, \epsilon)$ é aberto em T. Agora, lembre-se de que, se um conjunto é conexo, então seus únicos subconjuntos simultaneamente fechados e abertos é conjunto vazio e o próprio conjunto. Já mostramos que $S(x, \epsilon)$ é aberto e não-vazio. Se mostrarmos que é fechado, necessariamente deveremos ter $S(x, \epsilon) = T$, pois T é conexo. Esta igualdade, contudo, diz que existe uma $\epsilon-$cadeia de x para qualquer outro ponto de T. Pela arbitrariedade de x, concluiremos que T é transitivo por cadeias. Desta maneira, a fim de concluirmos a nossa prova, basta mostrar que $S(x, \epsilon)$ é fechado, isto é, que dado $y' \in \overline{S(x, \epsilon)}$, temos $y' \in S(x, \epsilon)$. Tome tal y'. Por ele ser aderente ao conjunto, podemos tomar um $y \in S(x, \epsilon)$ tal que $d(y, y') < \epsilon/2$. Pela proposição 5.5, $y' \in \Omega^+_\epsilon(y, f)$, e então existe uma $\epsilon-$cadeia de y para y'. Além do mais, também vai existir uma $\epsilon-$cadeia entre x e y, pois $y \in S(x, \epsilon)$. Concatenando então a $\epsilon-$cadeia de x a y para a $\epsilon-$cadeia de y para y' obtemos uma $\epsilon-$cadeia de x para y', donde $y' \in S(x, \epsilon)$ e concluímos a demonstração. ■

Vale a seguinte:

Proposição 5.8. *Sejam M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Então:*

$$\overline{\bigcup\{\omega(x); x \in X\}} \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$$

□

O assunto de recorrência e cadeias voltará daqui a duas seções, onde estabeleceremos uma relação inesperada entre tais coisas e o próximo assunto:

6 Atratores

Há diversas maneiras de definir um atrator. O conceito por trás, entretanto, é relativamente unânime. Um atrator é um conjunto que deve ser invariante (ou pelo menos positivamente invariante), deve possuir uma região próxima que é atraída por ele de forma que a distância tenda a zero quando o tempo vai para infinito e muitos autores ainda impõem que um atrator não possa ser subdividido. Nesta seção daremos uma definição de atrator e depois estudaremos suas propriedades mais básicas. As próximas subseções servirão para conectar a definição com a intuição.

A definição que usaremos neste texto[2], inspirada por [2] é a seguinte:

Definição 6.1. Seja (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Um conjunto $A \subset M$ é dito *atrator* se existe uma vizinhança aberta e não-vazia U de A tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{U})$. O aberto U é chamado de *região de captura*[3]. ♣

Obviamente, uma região de captura e seu fecho são sempre positivamente invariantes.

Proposição 6.1. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Se $A \subset M$ é um atrator, então A é compacto.* □

Demonstração. Se A é um atrator, então existe um conjunto U tal que $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{U})$. Como f é contínua, f^n também o é, para qualquer n. Ora, a imagem por uma função contínua de um compacto, é compacto. Como estamos num espaço métrico compacto e $\overline{U} \subset M$ é fechado, então $\overline{U}$ é compacto e portanto $f^n(\overline{U})$ é compacto, para todo n. Como a intersecção de compactos é compacto, segue a asserção. ■

Corolário 6.1.1. *Atratores são fechados.* □

Proposição 6.2. *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto. Se $A \subset M$ é um atrator, então $A \neq \emptyset$.* □

Demonstração. Basta notar que $(f^n(\overline{U})_n$ é uma família com a propriedade da intersecção finita (definição A.1) pois é uma família decrescente (lema 3.1) de conjuntos não-vazios (pois U é não vazio). Como estamos num espaço compacto, usando a proposição A.4 vemos que $A \coloneqq \cap f^n(\overline{U}) \neq \emptyset$. ■

Note que a hipótese da compacidade foi violentamente usada para provar a proposição anterior. De fato, em espaços métricos não-compactos, o conjunto vazio pode ser um atrator. Este é uma das desvantagens de estender a definição para espaços métricos arbitrários, conforme [1].

6.1 Invariância

A partir de aqui usaremos extensivamente as propriedades já discutidas sobre invariância, então é importante ter lido e compreendido a seção 3, em especial o lema 3.1 e seu corolário, inclusive suas consequências, algumas das quais serão

[2]Nesta seção, lidaremos extensivamente com imagens diretas, imagens inversas, imagens diretas por funções inversas, etc. Vale ressaltar algumas coisas. Para começar, lembre-se de que, se f é uma função invertível, então a imagem inversa de f e a imagem direta de f^{-1} empatam. Além disso $(f \circ ... \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(...f^{-1}(f^{-1}(A))...)$, ou seja, a imagem inversa de uma composição de funções é a "composição"de imagens inversas. Destarte, não há ambiguidades na notação $f^{-n}(A)$. Além do mais, se $f : X \to X$ é uma bijeção, então vale que $f^n(f^m(A)) = f^{(n+m)}(A)$, para qualquer $A \subset X$ e quaisquer inteiros n, m. Provar isto com indução pode ser um pouco chato. Para se convencer disto, você pode considerar f^n e f^m como elementos de um grupo.

[3]Em inglês, "trapping region". Alguns lugares chamam de "isolating neighborhood"

explicitamente citadas adiante, tal qual o resultado a seguir. Ressalto que o caso que foi lá chamado de patológico implicam aqui que A e U empatam e que estes conjuntos se tornarão simultaneamente abertos e fechados.

Proposição 6.3. *Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Se A é um atrator, então A é invariante.* $\square$

Demonstração. Se A é um atrator, então existe um conjunto U tal que $A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U})$. Ora, $f(A) = f\left(\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U})\right) = \bigcap_{n\geq 0} f(f^n(\overline{U})) = \bigcap_{n\geq 0} f^{n+1}(\overline{U})$ $= \bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U})$. Ora, pelo corolário 3.1.1, temos que $f(\overline{U}) \subset \overline{U}$. Assim, $\bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U}) \subset f(\overline{U}) \subset \overline{U}$, donde $\bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U}) \cap \overline{U} = \bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U})$ e portanto $A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = \bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U}) \cap \overline{U} = \bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U})$. Mas $f(A) = \bigcap_{n\geq 1} f^n(\overline{U})$, donde $f(A) = A$. $\blacksquare$

Corolário 6.3.1. *A é positivamente e negativamente invariante.* $\square$

Corolário 6.3.2. *Seja $X \subset M$ tal que $A \subset X \subset \overline{U}$. Então vale que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$.* $\square$

Demonstração. Como $X \subset \overline{U}$, então $f^n(X) \subset f^n(\overline{U})$, para todo n. Mas daí, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\overline{U}) = A$.

Reciprocamente, $A \subset X \implies f^n(A) \subset f^n(X)$, para todo n. Porém, usando a invariância de A, temos que $A \subset f^n(X)$, para todo n. Portanto, $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(X)$, donde segue a afirmação. $\blacksquare$

6.2 Bacia de Atração

Agora que já checamos a invariância de um atrator, comentemos que de fato há uma vizinhança que é atraída. Esta vizinhança é conhecida como bacia de atração. O fato dela ser atraída para A quando o tempo tende ao infinito pode ser expressa rigorosamente de diversas maneiras. Nesta seção, apresentaremos as maneiras principais e provaremos que de fato acontecem na nossa definição de atrator. Estas maneiras estão listadas a seguir: o conjunto $\omega-$limite dos pontos da bacia de atração estão contidos em A (proposição 6.4); $\limsup\{d(f^n(x), A); x \in B(A)\} = 0$ (corolário 6.4.4); dado um ponto b da bacia, para toda vizinhança W do atrator vai existir um tempo N tal que b está contido na vizinhança, em todo tempo posterior a N (proposição 6.5). Estas formas estão dizendo que a bacia de atração funciona como a região dentro de um horizonte de eventos e o atrator como um buraco negro.

Definição 6.2. Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Seja A um atrator e U a sua respectiva região de captura. O conjunto :

$$B(A) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U) \tag{1}$$

é dito *bacia de atração de A*. ♣

Proposição 6.4. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ um homeomorfismo, $A \subset M$ um atrator e U sua respectiva região de captura. Se $x \in U$, então $\omega(x) \subset A$.* $\square$

Demonstração. Ora, $x \in U \implies f^k(x) \in f^k(U) \subset f^k(\overline{U})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Entretanto, pelo corolário 3.1.1, $f^k(\overline{U}) \subset f^n(\overline{U})$, $\forall k \geq n$, donde concluímos: $f^k(x) \subset f^n(\overline{U})$, $\forall k \geq n$, ou seja, $\{f^k(x); k \geq n\} \subset f^n(\overline{U})$ portanto $\overline{\{f^k(x); k \geq n\}} \subset \overline{f^n(\overline{U})} = f^n(\overline{U})$, pois $\overline{U}$ é fechado e homeomorfismo levam fechados em fechados. Em suma, $\overline{\{f^k(x); k \geq n\}} \subset f^n(\overline{U})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto implica que $\omega(x) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{f^k(x); k \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$, como queríamos demonstrar. ∎

Corolário 6.4.1. *Se $x \in B(A)$, então $\omega(x) \subset A$.* $\square$

Demonstração. Se $x \in B(A)$, então existe n natural tal que $x \in f^{-n}(U)$, por definição. Ora, isto significa que $f^n(x) \in U$, donde $\omega(f^n(x)) \subset A$. Pelo item 2 do teorema 4.2 concluímos que $\omega(x) = omega(f^n(x))$, donde $\omega(x) \subset A$. ∎

Corolário 6.4.2. *Se $x \in U$, então* $\limsup d(f^n(x), A) = 0$. $\square$

Demonstração. É óbvio que o limite superior será maior ou igual a zero (pois a sequência o é). Suponha por absurdo que $\limsup d(f^n(x), A) = c > 0$. Então existe uma subsequência de $(f^n(x))_n$ tal que $\lim d(f^{n_k}(x), A) = c$. Também é evidente que a sequência $(f^n(x))_n$ está inteiramente contida em $\overline{U}$ (pelo lema 3.1), que é fechado e portanto compacto. Isso implica que há uma subsequência da subsequência tal que $\lim f^{n_{k_l}}(x) = y \in \overline{U}$. Como existe uma subsequência de $(f^n(x))_n$ convergente para y, temos que $y \in \omega(x) \subset A$, donde $y \in A$. Ora, temos que $\lim d(f^{n_{k_l}}(x), y) = 0$ e, pela proposição A.1, isto implica $\lim d(f^{n_{k_l}}(x), A) = 0$, o que é um absurdo, pois deveríamos ter $\lim d(f^{n_{k_l}}(x), A) = c$, já que isto valia para a sequência original, que deu origem a esta subsequência. ∎

Corolário 6.4.3. *Se $x \in U$, então* $\lim d(f^n(x), A) = 0$. $\square$

Demonstração. A sequência é limitada inferiormente por 0, donde $\liminf d(f^n(x), A) \geq 0$. Entretanto, o limite inferior é sempre menor ou igual do que o limite superior, que neste caso é zero. Assim, $\liminf d(f^n(x), A) = \limsup d(f^n(x), A) = 0$ e a afirmação fica provada. ∎

Corolário 6.4.4. *Se $x \in B(A)$, então* $\limsup d(f^n(x), A) = 0$. $\square$

Demonstração. Por definição, existe n natural tal que $x \in f^{-n}(U)$, donde $f^n(x) \in U$. Lembrando que o limite de uma sequência não depende dos primeiros n termos, recaímos no caso anterior. ∎

Corolário 6.4.5. *Vale que* $\lim d(f^n(\overline{U}), A) = 0$ $\square$

Demonstração. Tome $x \in U$. Dado $\epsilon > 0$, tome n_0 tal que $d(f^n(x), A) < \epsilon$, para todo $n > n_0$. A existência deste número é garantida pelo corolário 3. Dado um $n > n_0$, temos que $d(f^n(\overline{U}), A) = \inf\{d(x, y), x \in f^n(\overline{U}), y \in A)\} \leq \inf\{d(f^n(x), y), y \in A\} = d(f^n(x), A) < \epsilon$, donde $d(f^n(\overline{U}), A) < \epsilon$. A asserção segue da arbitrariedade de n e de ϵ. ∎

Proposição 6.5. *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto, $A \subset M$ um atrator, U uma região de captura para A e $B(A)$ sua respectiva bacia de atração. Então, dado W vizinhança de A existe n_0 tal que $f^n(b) \in W$, para todo $b \in U$. Além disso, para todo $b \in B(A)$ vai existir um n_0 tal que $f^n(b) \in W$, para todo $n \geq n_0$.* □

Demonstração. Para a primeira parte, como A é compacto (proposição 6.1), W é aberto (por hipótese), $(f^n(\overline{U}))_n$ é decrescente (corolário 3.1.1) e sua intersecção é A (por definição), então, usando o corolário A.3.2, temos que vai existir um n_0 tal que $f^n(\overline{U}) \subset W$, para todo $n \geq n_0$.

Além disso, se $b \in B(A)$, então existe m tal que $b \in f^{-m}(U)$ por definição, donde $f^{m+n}(b) \in f^n(U) \subset f^n(\overline{U})$. Assim, para $n > m + n_0$ temos que $f^n(b) \in f^{n_0}(\overline{U}) \in W$. ■

Corolário 6.5.1. $\lim_{n\to\infty} \left(\sup\{d(y, A), y \in f^n(\overline{U})\}\right) = 0$ □

Demonstração. A função "distância a um conjunto"é contínua (corolário A.2.1) e está definida num compacto (no caso, $f^n(\overline{U})$), assumindo portanto um máximo. Denote $y_n \coloneqq \sup\{d(y, A), y \in f^n(\overline{U})\} = \max\{d(y, A), y \in f^n(\overline{U})\}$. Queremos mostrar então que $\lim y_n = 0$. Pelo fato dos conjuntos serem encaixados (lema 3.1), temos que a sequência $(y_n)_n$ é decrescente. Ora, dado $\epsilon > 0$, tome a vizinhança aberta de A, $W_\epsilon = \{y \in M; d(y, A) < \epsilon\}$. Pela proposição, vai existir um n_0 tal que $n \geq n_0 \implies f^n(\overline{U}) \subset W_\epsilon$. Pelo que foi dito inicialmente, temos que $y_{n_0} \in f^{n_0}(\overline{U}) \subset W_\epsilon$ e portanto $d(y_n, A) < \epsilon$ para todo $n > n_0$ pelo fato da sequência ser decrescente. Isto completa a demonstração. ■

Note que, na proposição 6.5, para $b \in B(A)$, o n_0 pode depender de W e do próprio b. Para $b \in U$, n_0 só depende de W, valendo para qualquer elemento de U.

Um jeito similar, que mostraremos agora, é de que há uma vizinhança de A, por exemplo U, cujo conjunto $\omega-$limite é o próprio A. Esta expressão pode parecer estranha num primeiro momento já que só definimos o que vem a ser conjunto ômega-limite para pontos e não conjuntos. Porém, podemos lançar mão do teorema 4.2 para estender nossa definição de conjuntos limites de forma que $\omega(X) \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} f^k(X)}$. Ora, pelo lema 3.1, temos que $\bigcup_{k\geq n} f^k(\overline{U}) = f^n(\overline{U})$. Ora, como $\overline{U}$ é compacto (por ser fechado), temos que $f^n(\overline{U})$ também é compacto, portanto fechado, para todo n. Isso nos conta que $\overline{f^n(\overline{U})} = f^n(\overline{U})$. Assim, $\omega(\overline{U}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\overline{U})$, que é justamente A, por definição!

Na verdade, vale que $\omega(f^{-k}(\overline{U})) = A$, para qualquer $k \geq 0$, o que não é tão difícil de provar.

Note que muitas das propriedades valem tanto para U quanto para $B(A)$. Há, no entanto, duas exceções. A saber, $\omega(\overline{U}) = A$ mas em geral não se tem $\omega(B(A)) = A$ e também a diferença tratada na proposição 6.5.

A verdade é que a escolha de quais propriedades foram consideradas proposições e quais seguiram como corolário foi feita de forma relativamente arbitrária. A maioria das propriedades poderiam ser tiradas umas das outras.

Por exemplo, a maioria dos corolários da proposição 6.4 poderiam também ser corolários da proposição 6.5.

Há uma forma alternativa e equivalente de se definir bacia de atração. Para tanto, introduziremos o conceito de repulsor. Este objeto é o oposto do atrator, como o próprio nome diz.

Definição 6.3. Seja (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ uma função contínua, $A \subset M$ um atrator e $U \subset M$ sua respectiva região de captura. Seja $V := (\overline{U})^c$ e $A^* := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\overline{V})$. O conjunto A^* é dito *repulsor*. O par (A, A^*) é dito *par atrator-repulsor*. ♣

Se imaginarmos um vídeo onde o movimento tende a sair de uma região (repulsor) e ser atraída para outra (atrator), nada mais justo do que esperarmos que, caso o vídeo seja visto de trás para frente, o papel de cada região se inverta, isto é, a região repulsora se tornará atratora e vice-versa. A próxima proposição formaliza esta ideia.

Proposição 6.6. *Seja (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ um homeomorfismo e (A, A^*) um par atrator-repulsor. Então (A^*, A) será um par atrator-repulsor com relação a f^{-1}.* □

Demonstração. Para a primeira parte, comparando a definição de atrator com a de repulsor, vemos que, se $V := (\overline{U})^c$ (onde U é a região de captura de A) for uma região de captura com relação a f^{-1}, então automaticamente A^* é um atrator com relação a f^{-1}. Isto é, basta provarmos que $f^{-1}(\overline{V}) \subset V$, já que V é aberto por definição (complementar de um fechado). Ora, sabemos que $f(\overline{U}) \subset U$, então $f^{-1}(f(\overline{U})) \subset f^{-1}(U)$. Como f é invertível, $f^{-1}(f(\overline{U})) = \overline{U}$, donde $\overline{U} \subset f^{-1}(U) \implies (f^{-1}(U))^c \subset (\overline{U})^c \implies f^{-1}(U^c) \subset V$. Note que $U^c = \overline{V}$. Daí concluímos: $f^{-1}(\overline{V}) \subset V$.

Note que o repulsor dual a A^* com relação a f^{-1}, por definição, é $A^{**} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\overline{W})$, onde $W = (\overline{V})^c$. Ora, se provarmos que $W = U$, então teremos que $A^{**} = A$, donde A será um repulsor. De fato, sabemos que $U^c = \overline{V}$, donde $U = (\overline{V})^c = W$, e concluímos a prova.

■

Corolário 6.6.1. *Repulsores são compactos (portanto fechados) e invariantes quanto a f^{-1}.* □

Corolário 6.6.2. *Repulsores são invariantes quanto a f.* □

Demonstração. Sabemos, pelo corolário 6.6.1, que $f^{-1}(A^*) = A^*$. Tomando a imagem direta de ambos os lados da igualdade e nos aproveitando do fato de ser f uma bijeção temos $A^* = f(A^*)$, mostrando que A^* são invariantes quanto a f. ■

Corolário 6.6.3. *Atratores são invariantes quanto a f^{-1}.* □

O segundo corolário mostrou uma outra característica em comum entre atratores e repulsores: a invariância.

Agora, vejamos a relação entre o repulsor e a bacia de atração, como prometido.

Proposição 6.7. *Seja (M,d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função contínua. Se A é um atrator e A^* é seu respectivo repulsor, então $B(A) = (A^*)^c$.*
$\square$

Demonstração. A prova baseia-se principalmente em manipulação de conjuntos. Usaremos a lei de de Morgan violentamente. A começar de:

$$(A^*)^c = \bigcup_{n\geq 0} (f^{-n}(\overline{V}))^c$$

Lembre-se de que o complementar da imagem inversa empata com a imagem inversa do complementar, portanto:

$$\bigcup_{n\geq 0} (f^{-n}(\overline{V}))^c = \bigcup_{n\geq 0} (f^{-n}(\overline{V}^c))$$

Note também que $\overline{(\overline{U})^c} = U^c$, donde $\overline{V}^c = U$, isto é:

$$\bigcup_{n\geq 0} (f^{-n}(\overline{V}^c)) = \bigcup_{n\geq 0} (f^{-n}(U)) = B(A)$$

$\blacksquare$

Corolário 6.7.1. *$U \cap A^* = \emptyset$.* $\square$

Demonstração. De fato, evidentemente $U \subset B(A)$, donde $U \subset (A^*)^c$. $\blacksquare$

Corolário 6.7.2. *$A \cap A^* = \emptyset$.* $\square$

O corolário 6.7.2 simplesmente confirma nossa expectativa que um ponto não pode simultaneamente atrair e repelir.

No caso considerado patológico na seção 3 (por exemplo, se $f^{-1}(U) \subset U$ ou $U \subset f(U)$), além de termos A e U empatando, teremos também $B(A)$ sendo igual a estes conjuntos. Novamente, todos eles serão abertos e fechados. Neste caso, $A^* = A^c = U^c$, isto é, qualquer elemento do espaço métrico ou está no atrator ou no seu respectivo repulsor.

O próximo lema nos ajudará a visualizar as construções desenvolvidas, além de facilitar algumas demonstrações das próximas seções.

Lema 6.8. *Sejam (M,d) um espaço métrico, $f : M \to M$ um homeomorfismo e (A, A^*) um par atrator-repulsor, então $x \in (A \cup A^*)^c$ implica que existe um n natural tal que $x \in f^{-n}(U)\backslash f^{-(n-1)}(U)$. De outro modo, vale que:*

$$(A \cup A^*)^c \subset \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(N)$$

$\square$

Demonstração. Se $x \notin A \cup A^*$, em particular $x \notin A^*$, donde $x \in (A^*)^c$. Pela proposição 6.7, temos que $x \in B(A)$. Por definição de $B(A)$, temos que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(U)$. Mais do que isso, pelo lema 3.1 e seu corolário, note que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(U) \subset U$, donde $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-k}(U) = B(A)$ e portanto $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{-k}(U)$. Entretanto, deve haver um $k \in \mathbb{Z}$ mínimo tal que $x \in f^{-k}(U)$, pelo contrário teríamos $x \in f^n(U)$ para todo n (pois estes conjuntos são decrescentes), donde $x \in f^n(\overline{U})$, para todo n e daí $x \in A$, o que contraria nossa hipótese. Seja n tal inteiro mínimo. Como n é mínimo, temos que $x \notin f^{-(n-1)}(U)$, ou seja $x \in f^{-n}(U) \backslash f^{-(n-1)}(U)$. ∎

Agora, estamos em condições de dar, mais ou menos, uma imagem mental para os conceitos aqui desenvolvidos. *(em breve)*

7 *Cross-over*

Depois de brincarmos um pouco com as definições, ganhando um pouco de intuição, podemos partir para a próxima etapa e começar a estabelecer ligações diretas entre a teoria dos atratores e a teoria dos pontos recorrentes por cadeias. Os principais resultados serão os dois últimos lemas, mas os próximos resultados serão preparatórios.

O próximo lema, em específico, é puramente técnico. Veremos que, em um espaço métrico compacto, a quantidade de atratores é sempre enumerável. Como poderá ser observado na demonstração, usaremos violentamente que existe uma base enumerável da topologia de M. A existência disto é garantida pela hipótese de que M é um espaço métrico compacto. Na verdade, um espaço métrico ser separável já garante que haja uma base enumerável de abertos. Lembramos que todo espaço métrico compacto é separável.

Lema 7.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma função contínua. Então o conjunto de atratores de f é enumerável.* □

Demonstração. Seja $B = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base para a topologia de M. Uma tal base existe por ser M um espaço métrico compacto. Se A é um atrator com região de captura U, então U é uma união de abertos de B. Note que $A \subset U$ (pois $A \subset f(\overline{U})$ por definição de atrator e $f(\overline{U}) \subset U$ por definição de região de captura). Daí, U é uma cobertura aberta de A. Como A é compacto (proposição 6.1), então existe uma subcobertura finita, digamos $A \subset V_1 \cup ... \cup V_k \subset U$. Pelo corolário 6.3.2, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(V_1 \cup ... \cup V_k)$. Consequentemente, temos, no máximo, um atrator diferente para cada coleção finita de abertos de M, havendo um número enumerável deles. Mas isto fornece uma quantidade enumerável de atratores, o que termina nossa prova. ∎

O próximo lema nos diz que um velho amigo nosso, o conjunto $\Omega^+_\epsilon(x, f)$, sempre serve como região de captura para um atrator.

Lema 7.2. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo e $x \in M$. Então o conjunto $\Omega^+_\epsilon(x, f)$ é uma região de captura e, portanto, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\Omega^+_\epsilon(x, f))$ é um atrator.* □

Demonstração. Denote $U \coloneqq \Omega_\epsilon^+(x,f)$. Pela proposição 5.3, U é aberto. Precisamos, então, apenas mostrar que $f(\overline{U}) \subset U$, ou seja, que, dado $z \in \overline{U}$, $f(z) \in U$. Com efeito, pela continuidade de f podemos achar um δ tal que $d(z_0,z) < \delta \implies d(f(z_0),f(z)) < \epsilon$. Como $z \in \overline{U}$, existe um $z_0 \in U$ tal que $d(z,z_0) < \delta$. Como $z_0 \in U$, existe uma $\epsilon-$cadeia de x para z_0, $(x = x_0,...,x_n = z_0)$. Veja que a cadeia $(x = x_0,...,z_0,f(z))$ é uma $\epsilon-$cadeia, por construção e pelo fato de $d(f(z_0),f(z)) < \epsilon$. Mas então $f(z) \in U$, como queríamos demonstrar ■

Corolário 7.2.1. *$\Omega_\epsilon^+(x,f)$ é positivamente invariante.* □

O resultado que se segue é uma relação, a princípio, surpreendente entre atratores e pontos recorrentes por cadeias. O resultado diz o seguinte: um ponto só pode ser recorrente por cadeias se, para cada par atrator-repulsor que você der, este ponto necessariamente estiver em um dos dois (valendo a recíproca).

Lema 7.3. *Seja (M,d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o conjunto de todos os atratores de f (a validade desta afirmação segue do lema 7.1). Então vale que $\mathcal{R}(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup A_n^*)$.* □

Demonstração. Comecemos provando que $\mathcal{R}(f) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup A_n^*)$. Basta provar que, se existe um atrator A tal que $x \notin A \cup A^*$ (ou seja, que x não está nem no atrator nem no seu repulsor dual), então $x \notin \mathcal{R}$. Ora, se $x \notin A \cup A^*$, pelo lema 6.8, deve haver um m inteiro tal que $x \in W \coloneqq f^{-m}(U)$ e $x \notin f^{-(m-1)}(U) = f(W)$, ou seja $x \in W \backslash f(W)$. O próximo passo consiste em encontrar um ϵ_0 tal que, qualquer ϵ_0-cadeia $(x = x_0,x_1,x_2)$ tenha $x_2 \in f^2(W)$. Este ϵ_0 pode ser construído da seguinte maneira: note que $f^2(W)$ é aberto[4]. Então existe $\eta > 0$ tal que $B(f^2(x),\eta) \subset f^2(W)$. Além disso, como f é contínua, existe δ tal que $d(f(x),y) < \delta \implies d(f^2(x),f(y)) < \eta/2$. Tome $\epsilon_0 = \min\{\delta,\eta/2\}$. Dada uma ϵ_0-cadeia $(x = x_0,x_1,x_2)$, provaremos que $x_2 \in f^2(W)$. Por construção, $d(f(x),x_1) < \epsilon_0 < \delta$, donde $d(f^2(x),f(x_1)) < \eta/2$. Além do mais, $d(f(x_1),x_2) < \epsilon_0 < \eta/2$. Assim, $d(f^2(x),x_2) \le d(f^2(x),f(x_1)) + d(f(x_1),x_2) < \eta/2 + \eta/2 = \eta$, donde $x_2 \in B(f^2(x),\eta)$, e portanto $x_2 \in f^2(W)$. O que fizemos até agora só impede que tenhamos uma ϵ_0-cadeia de comprimento 2 saindo de x e voltando, mas ainda pode acontecer de uma ϵ_0-cadeia de comprimento maior realizar este serviço. Para evitar isto, faremos uma nova restrição com respeito a ϵ. Seja $\epsilon_1 = d(M\backslash f(W),\overline{f^2(W)})$. Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{\epsilon_0,\epsilon_1\}$, é fácil ver que nenhuma $\epsilon-$cadeia que começa num ponto de $f^2(W)$ pode alcançar $M\backslash f(W)$, e portanto não pode alcançar $x \in W$.

Reciprocamente, suponha que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cup A_n^*)$ e que $x \notin \mathcal{R}$ e cheguemos a um absurdo. Como $x \notin \mathcal{R}$, então existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que não existe ϵ_0-cadeia de x para ele mesmo. Tome $V \coloneqq \Omega_\epsilon^+(x,f)$. Pelo lema 7.2, $A \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\overline{V})$ é um atrator. Por hipótese, $x \in A$ ou $x \in A^*$, seu repulsor dual. Como x não é recorrente por cadeias, então $x \notin V$. Mas isso implica que $x \notin A$. Por outro lado, se $x \in A^*$, como A^* é fechado e positivamente invariante (porque é um

[4]Lembre-se de que homeomorfismos são aplicações abertas, isto é, levam abertos em abertos.

atrator e pelo corolário 6.6.2), então aconteceria de $\omega(x) \subset A^*$, pelo teorema 4.2.5. Entretanto, pela proposição 5.6, temos que $\omega(x) \subset V$, implicando que $\omega(x) \subset V \cap A^*$, o que é um absurdo pois $\omega(x) \neq \emptyset$, já que M é compacto, então a intersecção é não vazia (corolário 6.7.1). ∎

A prova do lema é bem longa, mas isso ocorre principalmente devido a detalhes técnicos. A ideia da primeira parte, por exemplo, é apenas perceber que, se x não está num atrator ou num repulsor, ele vai se aproximar cada vez mais de forma a não conseguir mais voltar para x. O grande trabalho está em achar um ϵ pequeno o bastante de forma que realizar saltos menores que ele não seja suficiente para fazer o ponto escapar da atração. Uma ideia semelhante é responsável pela primeira parte da demonstração do lema a seguir:

Lema 7.4. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $f : M \to M$ um homeomorfismo e $\mathcal{R}(f)$ o conjunto recorrente por cadeias de f. Então, dados $x, y \in \mathcal{R}(f)$, temos que x e y estão na mesma componente transitiva de $\mathcal{R}(f)$ se, e somente se não existe um A atrator tal que $x \in A$ e $y \in A^*$ ou vice-versa.* □

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $x \sim y$ e que $x \in A$. Queremos mostrar que $y \in A$. Pelo lema 7.3, ou $y \in A$ ou $y \in A^*$ então, basta mostrar que $y \notin A^*$, o que será feito por absurdo. Suponha, então que $y \in A^*$. Se U é a região de captura de A, tome $\epsilon = d(U^c, \overline{f(U)})$. Então não pode haver nenhuma $\epsilon/2-$cadeia de um ponto de $f(U)$ para um ponto de U^c. Com efeito, se $a_0 \in f(U)$, pelo lema 3.1, $f(a_0) \in f(U)$. Se fosse $a_1 \in U^c$, teríamos $d(f(a_0), a_1) \geq \epsilon$ (por definição de distância de ponto a conjunto), o que contraria a hipótese de que $d(f(a_0), a_1) < \epsilon/2$. Ora, $A \subset f(U)$ por definição e também é fácil ver que $A^* \subset U^c$, donde não pode haver nenhuma $\epsilon/2-$cadeia de A para A^*, o que é um absurdo pois $x \sim y$, $x \in A$ e $y \in A^*$.

Reciprocamente, suponha que $x \in A \iff y \in A$ (e portanto $x \in A^* \iff y \in A^*$), para todo A atrator. Dado $\epsilon > 0$, queremos mostrar que $y \in V := \Omega^+_\epsilon(x, f)$ e vice-versa. Ora, pelo lema 7.2, V é a região de captura de um atrator A_0. Como $x \in \mathcal{R}(f)$, pelo lema 7.3, $x \in A_0$ ou $x \in (A_0)^*$. Mas $x \in \mathcal{R}(f)$ também implica que $x \in V$. Pelo corolário 6.7.1, temos que $x \notin (A_0)^*$, donde $x \in A_0$. Mas, por hipótese, isso implica que $y \in A_0$, donde $y \in V$, como queríamos demonstrar. Similarmente podemos argumentar que $x \in \Omega^+_\epsilon(Y, f)$ o que conclui a demonstração. ∎

8 Funções de Lyapunov

Definição 8.1. Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Uma função de Lyapunov completa para f é uma função $g : M \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Se $x \in \mathcal{R}(f)$, então $g(f(x)) < g(x)$
2. Se $x, y \in \mathcal{R}(f)$, então $g(x) = g(y)$ se, e somente se $x \sim y$

3. $g(\mathcal{R}(f))$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ compacto e denso em lugar nenhum.

♣

Apesar da definição um pouco estranha, já vimos a enorme importância das funções de Lyapunov. O objetivo desta seção é o de provar um dos resultados mais centrais deste texto: a existência de uma tal função para qualquer homeomorfismo num espaço métrico compacto, lançando mão também de todas as ferramentas que desenvolvemos até aqui. Isto será feito construindo esta função explicitamente. Então, todo o trabalho desta seção será o de, dado um espaço métrico compacto e um homeomorfismo dele, construir uma função de Lyapunov.

Tal construção será feita em diversos passos. Uma dos resultados preliminares que precisaremos será o de construir uma função de Lyapunov "para cada atrator". De forma mais clara, dado um atrator, queremos uma função g *contínua* que dê 0 no atrator, 1 no respectivo repulsor e seja *estritamente* decrescente na órbita dos pontos que não estão em nenhum destes conjuntos. Para tanto, construiremos primeiro uma função similar g_1 mas que seja apenas não-crescente nas órbitas e a usaremos para construir g. Grande parte do trabalho se concentrará em provar que tal g_1 é contínua. Por sua vez, para construirmos g_1 precisaremos de uma função g_0 que sirva como uma indicadora da "distância relativa"entre um ponto e o atrator.

Vamos recapitular os passos, agora em ordem cronológica do que faremos: i) dado um atrator A, construiremos uma função g_0 que sirva de "distância relativa"entre um ponto e o atrator, a fim de ii) construirmos uma função g_1 que seja *contínua* e não-crescente nas órbitas entre o repulsor e o atrator, a fim de iii) construirmos uma função g que seja *contínua* e *estritamente decrescente* nas órbitas. Construída tal função para cada atrator, usaremos todas elas para finalmente iv) construir nossa função de Lyapunov.

Vamos começar agora.

Proposição 8.1. *Seja (M, d) um espaço métrico compacto, $f : M \to M$ um homeomorfismo e (A, A^*) um par atrator-repulsor com relação a f. Então a função $g_0 : M \to [0, 1]$ dada por*

$$g_0(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}$$

está bem definida. □

Demonstração. Queremos mostrar duas coisas: i) o contradomínio de g_0 é de fato $[0, 1]$; ii) não há risco do denominador dar zero.

Que $g_0(x) \geq 0$ vem diretamente do fato da função distância ser não-negativa. Suponha agora, por absurdo, que $g_0(x) > 1$. Então teremos que $d(x, A) > d(x, A) + d(x, a^*) \implies 0 > d(x, A^*)$, o que é um absurdo sem tamanho.

Novamente, como a função distância é não-negativa, para que o denominador dê zero seria necessário que tanto $d(x, A)$ quanto $d(x, A^*)$ fossem zero. Para provarmos que isto é impossível, basta então provar que se a primeira é zero, o mesmo não pode ocorrer com a segunda. Suponhamos então que $d(x, A) = 0$. Isto implica que $x \in \overline{A}$ [5]. Mas A é fechado (corolário 6.1.1), donde $x \in A$. Suponha, por absurdo, que também temos $d(x, A^*) = 0$. Então $x \in \overline{A}^* = A^*$ (corolário 6.6.1) mas então $A \cap A^* \neq \emptyset$, o que contraria o corolário 6.7.2. ∎

Como comentado, a função g_0 é uma espécie de função "distância relativa". Quanto menor é $g_0(x)$, mais próximo o ponto está do atrator, valendo 0 caso ele estiver precisamente lá. Quanto maior é $g_0(x)$, mais distante o ponto x está do atrator, valendo 1 no pior caso, onde teremos que x está no repulsor relativo a A.

Em particular, no decorrer da demonstração da proposição 8.1 também provamos a seguinte:

Proposição 8.2. *Nos moldes da proposição 8.1 temos que* $g_0(x) = 0 \iff x \in A$ *e* $g_0(x) = 1 \iff x \in A^*$. □

Proposição 8.3. *A função* g_0 *definida acima é lipschitziana (portanto contínua).*

Demonstração. Note que o denominador de g_0 é contínuo pois é a soma de duas funções contínuas (corolário A.2.1). Por estar definida num compacto, a função $d(x, A) + d(x, A^*)$ assume um mínimo, que não pode ser zero, pela proposição 8.1. Assim, podemos dizer com certeza que $0 < c \leq d(x, A) + d(x, A^*)$, para todo $x \in M$.

Com isto, dados x e $y \in M$ temos que

$$|g_0(x) - g_0(y)| = \left| \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)} - \frac{d(y, A)}{d(y, A) + d(y, A^*)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{c} \left| d(x, A) - d(y, A) \right|$$

Como a função distância é lipschitziana (mesmo corolário A.2.1), temos que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq K \cdot d(x, y)$. (Na verdade $K = 1$). Donde $|g_0(x) - g_0(y)| \leq \frac{1}{c} d(x, y)$, e então g_0 é de fato Lipschitz. ∎

Defino agora a função $g_1 : M \to [0, 1]$ por $g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)); n \geq 0\}$. O supremo está bem definido pois é trivial ver que o conjunto é limitado (devido ao fato do contradomínio de g_0 ser limitado) e não-vazio. Também é evidente que o supremo de um conjunto contido em $[0, 1]$ estará em $[0, 1]$, donde se justifica o contradomínio da função. Podemos pensar que esta função indica a distância relativa "máxima" da órbita de um ponto.

Proposição 8.4. *Vale que* $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$, $\forall x \in M$. □

Demonstração. Defina $C := \{g_0(f^n(x)); n \geq 0\}$ e $D := \{g_0(f^n(x)); n \geq 1\}$. Claramente $g_1(x) = \sup C$ e $g_1(f(x)) = \sup D$. Mas, como $D \subset C$, temos que $\sup D \leq \sup C$, donde $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$. ∎

[5] Caso não esteja convencido, consulte Elon L. Lima - Espaços Métricos, seção 1.4.

Proposição 8.5. *Vale que* $g_1(x) = 0 \iff x \in A$. *Além disso,* $g_1(x) = 1 \iff x \in A^*$. □

Demonstração. Por definição, $g_1(x) = 0 \iff \sup\{g_0(f^n(x)); n \geq 0\} = 0$. E claramente $\sup\{g_0(f^n(x)); n \geq 0\} = 0 \leftarrow g_0(f^n(x)) = 0$, $\forall n \geq 0$. Entretanto, como $g_0(x) \geq 0$, $\forall x$, vale também a recíproca, donde $g_1(x) = 0 \iff g_0(f^n(x)) = 0$, $\forall n \geq 0$. Pela proposição 8.2, concluímos que $g_1(x) = 0 \iff f^n(x)) \in A$, $\forall n \geq 0$. Ora, se $f^n(x)) \in A$, $\forall n \geq 0$, em particular vale que $x \in A$. Por outro lado, se $x \in A$, pela invariância de A (proposição 6.3), teremos que $f^n(x) \in A$, $\forall n \geq 0$. E a asserção segue.

Para a segunda parte, é óbvio que $x \in A^* \implies g_1(x) = 1$. ■

Lema 8.6. *A função* g_1 *é contínua em* A. □

Demonstração. Seja $(x_i)_i$ uma sequência que converge para $x \in A$. Basta mostrar que $\lim g_1(x_i) = 0$ (pois teremos $g_1(x) = 0$).

Primeiramente, note que $g_0(f^n(x_i)) \leq \frac{1}{c} d(f^n(x_i), A)$, onde $c > 0$ é o valor mínimo que a função $d(x, A) + d(x, A^*)$ assume. Tal número existe pelos argumentos usados na demonstração da proposição 8.3. Assim, $\sup\{g_0(f^n(x_i)); n \geq 0\} \leq \sup\{\frac{1}{c} d(f^n(x_i), A); n \geq 0\} = \frac{1}{c} \sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\}$. Sempre vale que $0 \leq \sup\{g_0(f^n(x_i)); n \geq 0\} \leq \frac{1}{c} \sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\}$. Pelo teorema do confronto, é suficiente mostramos que $\lim \left(\frac{1}{c} \sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\}\right) = 0$, que, por sua vez, é equivalente a mostramos que $\lim (\sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\})$. Em suma, basta mostrarmos que, dado $\epsilon > 0$, existe i_0 tal que $i > i_0 \implies \sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\} \leq \epsilon$.

Seja ϵ então fixado. Pela convergência de (x_i), vai existir i_1 tal que $x_1 \in U$, $\forall i > i_1$. Pela proposição 6.5, existirá, portanto, um n_1 tal que $d(f^n(x_i), A) < \epsilon$, $\forall i \geq i_1$, $\forall n \geq n_1$. Pela continuidade de f, temos que $\lim_{i\to\infty} f^n(x_i) = f^n(x) \in A$ (pela invariância de A), para todo n. Isso nos diz que, dado um n, vai existir i_{2_n} tal que $i > i_{2_n} \implies d(f^n(x_i), A) < \epsilon$. Tome $i_2 = \max\{i_{2_n}; 0 \leq n \leq n_1\}$. Então $i > i_2 \implies d(f^n(x_i), A) < \epsilon$, $\forall n \leq n_1$. Tomando agora $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, teremos $i > i_0 \implies d(f^n(x_i), A) < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ora, $d(f^n(x_i), A) < \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ implica que $\sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\} < \epsilon$. Assim, achamos um i_0 capaz de tornar verdade a implicação $i > i_0 \implies \sup\{d(f^n(x_i), A); n \geq 0\} \leq \epsilon$, que é precisamente o que queríamos mostrar. ■

Lema 8.7. g_1 *é contínua em* A^*. □

Demonstração. Seja $(x_i)_i$ uma sequência que converge para $x \in A^*$. Basta mostrar que $\lim g_1(x_i) = 1$ (pois teremos $g_1(x) = 1$).

Note que sempre vale que $g_0(x_i) \leq g_1(x_i) \leq 1$. Assim, pelo teorema do confronto, basta provarmos que $\lim g_0(x_i) = 1$, ou seja, que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{d(x_i, A)}{d(x_i, A) + d(x_i, A^*)} = 1$$

Como $\lim x_i = x$, temos que $\lim d(x_i, A) = d(x, A)$. Além disso, como $x \in A^*$, temos que $\lim d(x_i, A^*) = d(x, A^*) = 0$, donde $\lim = (d(x_i, A) + d(x_i, A^*)) = d(x, A)$. Mas daí concluímos que:

$$\lim g_0(x_i) = \frac{\lim d(x_i, A)}{\lim(d(x_i, A) + d(x_i, A^*))} = \frac{d(x, A)}{d(x, A)} = 1$$

Pois, como $x \in A^*$, não podemos ter $d(x, A) = 0$, pelo que já foi dito. Já terminamos a demonstração. ■

Proposição 8.8. *Seja $N := U \backslash f(\overline{U})$. Se $N \neq \emptyset$, então g_1 é contínua em N.* □

Demonstração. Seja $s := \inf\{d(x, A), x \in N\}$. Tal número está bem definido pois $N \neq \emptyset$ por hipótese e este conjunto é limitado inferiormente por zero (proposição 8.1). Na verdade, vale que $s > 0$ pois $U \backslash f(\overline{U}) \subset \overline{U} \backslash f(U)$, donde $s \geq \inf\{d(x, A), x \in \overline{U} \backslash f(U)\} \geq 0$. Como $\overline{U} \backslash f(U)$ é compacto e a função distância é contínua, então $\inf\{d(x, A), x \in \overline{U} \backslash f(U)\} = \min\{d(x, A), x \in \overline{U} \backslash f(U)\}$. Se $s = 0$, então $\min\{d(x, A), x \in \overline{U} \backslash f(U)\} = 0$, donde existe $x \in \overline{U} \backslash f(U)$ tal que $d(x, A) = 0$, donde $x \in A$ e portanto $(\overline{U} \backslash f(U)) \cap A \neq \emptyset$, o que um absurdo pois $A \subset f(U)$ $(f(\overline{U} \subset U \implies f^2(\overline{U}) \subset f(U)$ e $A \subset f^2(\overline{U}))$. Defina agora $r := \inf\{g_0(x), x \in N\}$. Além disso, seja C o valor máximo que a função $d(x, A) + d(x, A^*)$ assume (tal valor existe pelos argumentos da demonstração da proposição 8.3). Então $\frac{d(x,A)}{C} \leq g_0(x)$, $\forall x$, donde $\frac{s}{C} \leq r$ e $0 < \frac{s}{2C} \leq \frac{r}{2} < r \leq g_0(x)$ e portanto $0 < r$.

Pelo corolário 6.5.1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \sup\{d(x, A); x \in f^n(\overline{U})\} < c.r/2$, onde c é o mínimo de $d(x, A) + d(x, A^*)$. Afirmo que $g_0(f^n(x)) < r/2$, para todo $n \geq n_0$. De fato,

$$g_0(f^n(x)) \leq \frac{1}{c} d(f^n(x), A) \leq \frac{1}{c} \sup\{d(x, A); x \in f^n(\overline{U})\}$$

Pois $x \in N \implies x \in U$, logo $f^n(x) \in f^n(\overline{U})$. E também:

$$\sup\{d(x, A); x \in f^n(\overline{U})\} < \frac{c.r}{2} \implies \frac{1}{c} \sup\{d(x, A); x \in f^n(\overline{U})\} < \frac{r}{2}$$

Lembrando que última desigualdade de cima vale para $n \geq n_0$.

Assim, para $x \in N$, $g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)); n \geq 0\} = \sup\{g_0(f^n(x)); 0 \geq n \geq n_0\}$, pois para $n > n_0$ temos $g_0(f^n(x)) \leq r/2 < r \leq g_0(x)$. Mas daí restamos com um número finito de termos e portanto $g_1(x) = \max\{g_0(f^n(x)); 0 \geq n \geq n_0\}$. Como a função máximo é contínua e empata com g_1 em N que é um conjunto aberto, concluímos que $g_1(x)$ é contínua nesta região. ■

Lema 8.9. *g_1 é contínua em M.* □

Definimos agora:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}}$$

Esta soma converge uniformemente. Podemos ver isto pelo teste M de Weierstrass por exemplo. Disto, e do lema 8.9, segue que g é contínua.

Proposição 8.10. *Vale que* $g(x) = 0 \iff x \in A$. *Além disso,* $g(x) = 1 \iff x \in A^*$. $\square$

Demonstração. $\blacksquare$

9 Aplicações

Uma das aplicações da teoria desenvolvida até aqui, devida a [2], refere-se a uma variação do teorema de Poincaré-Birkhoff.

Apêndice A Alguns fatos sobre Espaços Métricos

Enunciaremos aqui alguns dos resultados sobre espaços métricos que usamos ao longo do texto.

A.1 Distância de Ponto a Conjunto

Proposição A.1. *Sejam* (M, d) *um espaço métrico e* $(x_n)_n$ *uma sequência em* M *que converge para um elemento* $x \in M$. *Então, se* $X \subset M$ *é tal que* $x \in X$, *teremos* $\lim d(x_n, X) = 0$. $\square$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tome n_0 natural tal que $d(x_n, x) < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Teremos que $d(x_n, X) = \inf\{d(x_n, x'), x' \in X\} \leq d(x_n, x)$, já que o ínfimo é uma cota inferior e já que $x \in X$. Portanto, para $n > n_0$, $d(x_n, X) < \epsilon$. Pela arbitrariedade do ϵ concluímos que $\lim d(x_n, X) = 0$. $\blacksquare$

Proposição A.2. *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Dados* $x, y \in M$ *e* $A \subset M$ *não vazio, vale que* $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. $\square$

Demonstração. Dados $x, y \in M$, para todo $z \in A$ temos que $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, donde $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \implies d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Trocando os papéis de x e y temos que $d(y, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, e isto é o suficiente. $\blacksquare$

Corolário A.2.1. *A função* $f : M \to \mathbb{R}$ *definida por* $x \mapsto d(x, A)$ *é lipschitziana.* $\square$

Demonstração. $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ (constante de Lipschitz 1) $\blacksquare$

A.2 Compacidade

A definição usual de espaço métrico compacto é a seguinte. Toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita. Usando complementares e a lei de de Morgan, encontramos a seguinte equivalência para espaços métricos compactos.

Proposição A.3. *Um espaço métrico (K, d) é compacto se, e somente se, toda família de conjuntos fechados de K com intersecção vazia admitir uma subfamília finita também com intersecção vazia.* $\square$

Corolário A.3.1. *Se K é compacto e $(F_i)_i$ é uma família de fechados com intersecção contida num aberto U, então existe uma subfamília finita de $(F_i)_i$ com intersecção contida em U.* $\square$

Demonstração. Tome a família formada por F_i mais o complementar de U, que é fechado pois U é aberto. A intersecção desta nova família será vazia pois $\cap F_i \subset U$ então $\cap F_i \cap U^c = \emptyset$. Assim, vai existir uma subfamília finita com intersecção vazia. Se o complementar de U não estiver na subfamília, não teremos de fazer nada pois vai existir uma subfamília finita de $(F_i)_i$ com intersecção vazia e portanto contida em U. Caso contrário, podemos dizer que a subfamília é da forma $F_1 \cap ... \cap F_n \cap U^c$. Se não valesse que $F_1 \cap ... \cap F_n \subset U$, então teríamos $(F_1 \cap ... \cap F_n) \cap U^c \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Assim, necessariamente $F_1 \cap ... \cap F_n \subset U$ e portanto, qualquer que seja o caso, existe uma subfamília finita de $(F_i)_i$ com intersecção contida em U. $\blacksquare$

Corolário A.3.2. *Se K é compacto e $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma família decrescente de fechados com intersecção contida num aberto U, então existe um n_0 tal que $F_n \subset U$, para todo $n \geq n_0$.* $\square$

Demonstração. Pelo corolário 1, existe uma subfamília finita, digamos $(F_1, ..., F_{n_0}$ com intersecção contida em U. Por outro lado, como a subfamília é decrescente, temos que $\bigcap_{i=1}^{n_0} F_i = F_{n_0}$, e então $F_{n_0} \subset U$. Ora, novamente usando o fato da família ser decrescente concluímos que $F_n \subset U$, para todo $n \geq n_0$. $\blacksquare$

Definição A.1. Uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ goza da *propriedade da intersecção finita* quando toda subfamília finita possui intersecção não-vazia. ♣

Proposição A.4. *Seja (M, d) um espaço métrico. Então M é compacto se, e somente se, para toda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de fechados com a propriedade da intersecção finita valer que $\cap F_\lambda \neq \emptyset$.* $\square$

Demonstração. Suponha que M é compacto. Provaremos que $\cap F_\lambda \neq \emptyset$ pela contrapositiva, isto é, que se $\cap F_\lambda = \emptyset$, então a família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ não pode gozar da propriedade da intersecção finita. De fato, como $\cap F_\lambda = \emptyset$ e M é compacto, então, pela proposição A.3, deve ter uma subfamília finita de $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ cuja intersecção é vazia. Reciprocamente, suponha que valha a implicação: $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ ter a propriedade da intersecção finita $\implies \cap F_\lambda \neq \emptyset$. Isto é equivalente a dizer que $\cap F_\lambda = \emptyset \implies (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ não ter p.i.f. Não ter p.i.f. é o mesmo que dizer que há uma subfamília finita com intersecção vazia. Assim, concluímos que $\cap F_\lambda = \emptyset \implies$ existir uma subfamília finita com intersecção vazia. Novamente, a proposição A.3 diz que isso implica na compacidade de M. $\blacksquare$

Referências

[1] Mike Hurley. *Lyapunov Functions and Attractors in Arbitrary Metric Spaces.* American Mathematical Society, 1998.

[2] John Franks. *A Variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem.* American Mathematical Society, 1988.

[3] Clark Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos.*

[4] Charles Conley. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index.* C.B.M.S. Regional Conference Series in Math. **38**, American Mathematical Society., Providence, RI, 1978.